



A: XXXIX-0000

FLEXÃO DE VIGAS DUPLAS ELASTICAMENTE CONECTADAS POR BASE DE KERR PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

FINITE ELEMENT SOLUTION OF THE DOUBLE-BEAM SYSTEM ELASTICALLY CONNECTED BY A KERR-TYPE LAYER

Welky K. F. de Brito (A) (1); Arthur C. A. Pereira (1); Daniel B. de Oliveira (1); Ângelo V. Mendonça (1)

(1) Civil and Environmental Engineering Department, Federal University of Paraíba
UFPB, Center for Technology, Campus I, 58059-900, João Pessoa/Paraíba, Brazil
klefsonbrito@hotmail.com.

Área temática: Análise Estrutural: Métodos Computacionais.

Resumo

Os sistemas de vigas duplas, constituído por duas vigas paralelas unidas ao longo do seu comprimento por uma camada elástica, tem sido estudada de forma intensiva por diversos autores nas últimas décadas devido ao seu potencial de aplicação nos mais variados problemas de engenharia. Usualmente, modelos de base elástica com um ou dois parâmetros são utilizados. Entretanto, os modelos de três parâmetros se apresentam como uma interessante alternativa, uma vez que produzem respostas mais eficientes e próximas do problema real, tal afirmação é verificada quando comparadas aos modelos contínuos existentes na literatura. Diante disso, é objetivo desse trabalho estudar o sistema de vigas duplas com cargas axiais conectadas por base elástica de três parâmetros de Kerr. Diferentes propriedades mecânicas, condições de contorno e casos de carregamento são avaliados. Para isso, é proposto um elemento finito com dez graus de liberdade baseado na teoria clássica de vigas, onde a matriz de rigidez e o vetor de carga serão apresentados. Por fim, exemplos numéricos serão feitos e comparados com os valores exatos, ou outros apresentados na literatura, a fim de avaliar a eficiência do elemento proposto.

Palavras-chave: Base elástica de Kerr; Cargas axiais; MEF; Sistema de vigas duplas.

Abstract

The double-beam system (DBS), consisting of two parallel-beams joined by an elastic layer, has been intensively studied in the last decades due to its application in a most variety of engineering problems. One and two-parameters elastic foundation models have been commonly used to represent the middle layer, where even the last one does not represent the most realistic behavior of the elastic layer. Thus, a three-parameter model provides an effective and efficient tool once it correctly predicts the stress concentration, which is verified by continuum models existing in the literature. In this paper, a DBS with the effect of compressive axial load with an elastic layer in-between is studied. It is assumed that the two parallel-beams of the system have the same length, different boundary conditions and load cases, and are continuously joined by the Keer type elastic model. A finite element with ten degrees of freedom based on Euler-Bernoulli beam theory is proposed, and the stiffness matrix and load vector are explicitly shown. Numerical examples demonstrate that the proposed finite element is accurate compared with the exact solution, and other given in the literature.

Keywords: Axial loads; Double-beam; FEM; Kerr elastic layer.



1. INTRODUÇÃO

A análise de vigas simples ou vigas-colunas e sua interação com o solo tem sido objeto de estudo de vários pesquisadores e ocupam um papel importante dentro da engenharia. Como resultado do incessante desenvolvimento de pesquisas nesse campo, modernas estruturas de vigas, como por exemplo os sistemas duplos, tem sido intensivamente estudada por vários pesquisadores. Vigas duplas elasticamente conectadas são aplicadas nos mais diversos casos práticos: vigas sanduíche ou compósitos, juntas adesivas, nano tubos de carbono com paredes duplas, entre outros.

O modelo físico consiste em duas vigas paralelas, uma superior e outra inferior, prismáticas ou não, conectadas entre si por um meio elástica. As teorias de vigas, combinadas com modelos de bases elásticas, são utilizadas como estratégias de solução evitando um custo matemático muito alto frente aos modelos baseados na teoria da elasticidade. A teoria clássica de vigas, ou teoria de Euler-Bernoulli, tem sido bastante utilizada: desde os problemas dinâmicos, como visto em Seelig (1964), Agboola (2017), Liu (2019), Mirzabeigy (2019) e Li *et.al.* (2021), até os estáticos apresentados por Chung. (1988) e Brito (2019), ao qual normalmente são modelados utilizando os modelos de base elástica de Winkler e/ou Pasternak.

Por outro lado, a literatura disponível para vigas apoiadas ou conectadas por camada elástica de três parâmetros ainda é bastante limitada. Alguns trabalhos cujo foco é a viga simples apoiada na fundação de Kerr podem ser encontrados. Todavia, pouco é discutido sobre a viga dupla. Em Kozić (2014), é obtida a solução analítica para o problema da vibração livre e flambagem, onde a teoria de Euler-Bernoulli é utilizada para representar a cinemática de deformação da viga. Por sua vez, Milenković (2021) obteve a solução analítica do problema de vibração livre para a teoria de vigas de Rayleigh. Nele, o efeito da carga axial nas vigas também é considerado. Em ambos a solução apresentada é aplicada para sistemas duplos com mesmas propriedades mecânicas e apoios simples.

Tendo em vista a revisão da literatura, o presente trabalho procura investigar a flexão de vigas duplas elasticamente conectadas por camada elástica de três parâmetros de Kerr com carga axial. Dessa forma, é proposto um elemento finito com dez graus de liberdade, ao qual a matriz de rigidez e o vetor de carga são apresentados. Os exemplos numéricos, comparados com os exatos, mostram a eficiência da formulação desenvolvida.

3. MODELO MATEMÁTICO

O sistema em estudo é formado por duas vigas paralelas, de mesmo comprimento L , submetidas a cargas transversais e axiais, e conectadas por uma camada elástica, conforme Fig. 1. No modelo em estudo, o efeito da deformação por cisalhamento é negligenciado, ao qual a teoria de vigas de Euler-Bernoulli é adotada. Além do mais, as vigas podem ter diferentes propriedades mecânicas: elas são caracterizadas completamente por seu módulo de elasticidade E_i e pelo momento de inércia I_i , onde o índice $i = u, l$ diz respeito à viga superior e inferior, respectivamente. A camada que conecta as vigas é do tipo Kerr, onde três parâmetros são necessários para caracterizá-la: k_c , k_k , e G_s (Kerr (1964)).

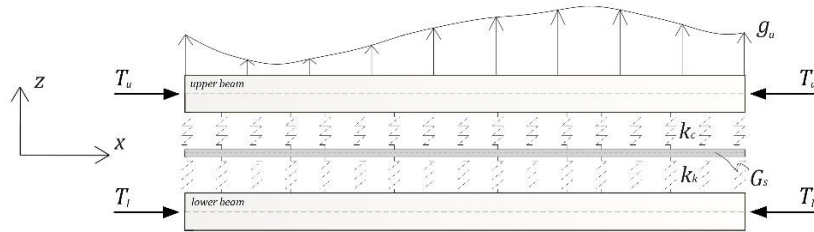


Figura 1. Sistema de vigas duplas elasticamente conectadas.

Usando a relação constitutiva para a viga de Euler-Bernoulli, a energia total de deformação do sistema é dada por:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=u}^l \int_0^L [D_i (w_i'')^2 - T_i (w_i')^2 - g_i w_i] dx + \frac{1}{2} \int_0^L k_c \Delta_u^2 + G_s (v')^2 + k_k \Delta_l^2 dx \quad 1$$

onde $' = d(\cdot)/dx$, $\Delta_u = w_u - v$, $\Delta_l = v - w_l$, $D_i = E_i I_i$ é a rigidez, $w_i = w_i(x)$ é o deslocamento transversal da viga i e $v = v(x)$ o deslocamento da camada cisalhante.

Aplicando os princípios energéticos, a primeira variação da eq. (1) dá a equação diferencial do sistema de vigas duplas, como pode ser visto a seguir:

$$D_1 \frac{d^4 w_u}{dx^4} + T_u \frac{d^2 w_u}{dx^2} + k_c (w_u - v) = 0 \quad 2$$

$$-G_s \frac{d^2 v}{dx^2} - k_c (w_u - v) + k_k (v - w_l) = 0 \quad 3$$

$$D_2 \frac{d^4 w_l}{dx^4} + T_l \frac{d^2 w_l}{dx^2} - k_k (v - w_l) = 0 \quad 4$$

Note que as eqs. (2), (3) e (4) correspondem a um sistema acoplado em w_u , w_l e v .

3.1. Formulação via MEF

Com o objetivo em obter a matriz de rigidez do sistema e o vetor de carga, é necessário ter em mente que w_i , v e dw_i/dx são os graus de liberdade em cada nó do elemento, resultando em um total de dez graus de liberdade por elemento, conforme Fig. 2. Assim, assume-se que os deslocamentos são representados por polinômios de nona ordem, onde:

$$w_u(\xi) = a_{u9} \xi^9 + a_{u8} \xi^8 + a_{u7} \xi^7 + a_{u6} \xi^6 + a_{u5} \xi^5 + a_{u4} \xi^4 + a_{u3} \xi^3 + a_{u2} \xi^2 + a_{u1} \xi + a_{u0}, \quad 5$$

$$w_l(\xi) = a_{l9} \xi^9 + a_{l8} \xi^8 + a_{l7} \xi^7 + a_{l6} \xi^6 + a_{l5} \xi^5 + a_{l4} \xi^4 + a_{l3} \xi^3 + a_{l2} \xi^2 + a_{l1} \xi + a_{l0}, \quad 6$$

$$v(\xi) = c_9 \xi^9 + c_8 \xi^8 + c_7 \xi^7 + c_6 \xi^6 + c_5 \xi^5 + c_4 \xi^4 + c_3 \xi^3 + c_2 \xi^2 + c_1 \xi + c_0, \quad 7$$

sendo $\xi = x/a = 2x/L$ a coordenada longitudinal do sistema cartesiano adotado, ao qual $\xi \in [-1,1]$. As eqs. (5) até (7) podem ser escritas na forma matricial como:

$$w_u(\xi) = [f(\xi)] \{a_u\}, \quad 8$$

$$w_l(\xi) = [f(\xi)] \{a_l\} \quad 9$$

$$v(\xi) = [f(\xi)] \{c\}, \quad 10$$

ou ainda reescritas, eqs. (8) e (9), em relação as constantes c dadas pela eq. (7) como segue:



$$w_u(\xi) = [f_u(\xi)]\{c\}, \quad 11$$

$$w_l(\xi) = [f_l(\xi)]\{c\}. \quad 12$$

A relação entre as constantes a_i e c são obtidas a partir da combinação das eqs. (2) e (4), e ainda por meio da eq. (3), sendo dadas por:

$$a_{i_9} = c_9, \quad 13$$

$$a_{i_8} = c_8, \quad 14$$

$$a_{i_7} = 36\psi_{i_1}c_9 + c_7, \quad 15$$

$$a_{i_6} = 28\psi_{i_1}c_8 + c_6, \quad 16$$

$$a_{i_5} = 126\psi_{i_2}c_9 + 21\psi_{i_1}c_7 + c_5, \quad 17$$

$$a_{i_4} = 70\psi_{i_2}c_8 + 15\psi_{i_1}c_6 + c_4, \quad 18$$

$$a_{i_3} = 84\psi_{i_3}c_9 + 35\psi_{i_2}c_7 + 10\psi_{i_1}c_5 + c_3, \quad 19$$

$$a_{i_2} = 28\psi_{i_3}c_8 + 15\psi_{i_2}c_6 + 6\psi_{i_1}c_4 + c_2, \quad 20$$

$$a_{i_1} = 9\psi_{i_4}c_9 + 7\psi_{i_3}c_7 + 5\psi_{i_2}c_5 + 3\psi_{i_1}c_3 + c_1, \quad 21$$

$$a_{i_0} = \psi_{i_4}c_8 + \psi_{i_3}c_6 + \psi_{i_2}c_4 + \psi_{i_1}c_2 + c_0, \quad 22$$

onde os valores de ψ_i são:

$$\psi_{u1} + k_k \varepsilon = \psi_{l1} - k_c \varepsilon = \gamma \quad 23$$

$$-\frac{\psi_{u2}}{k_k} = \frac{\psi_{l2}}{k_c} = [6\varepsilon(\gamma - \mu) + \alpha] \quad 24$$

$$-\frac{\psi_{u3}}{k_k} = \frac{\psi_{l3}}{k_c} = 15[(\gamma - \mu)(6\mu\varepsilon - \alpha) + 6\beta\varepsilon] \quad 25$$

$$-\frac{\psi_{u4}}{k_k} = \frac{\psi_{l4}}{k_c} = 420\{[\alpha + 6\varepsilon(\gamma - \mu)](\beta - \mu^2) + \mu(\gamma\alpha - 6\beta\varepsilon)\} \quad 26$$

com $\gamma = -2G_s/a^2(k_c + k_k)$, $\alpha = 24(\lambda_u - \lambda_l)/(k_c + k_k)$, $\beta = 4(k_c \lambda_l + k_k \lambda_u)/(k_c + k_k)$, $\varepsilon = 2(\delta_u - \delta_l)/(k_c + k_k)$, $\mu = 2(k_c \delta_l + k_k \delta_u)/(k_c + k_k)$, $\lambda_u = D_u/k_c a^4$, $\lambda_l = D_l/k_k a^4$, $\delta_u = T_u/k_c a^2$ e $\delta_l = T_l/k_k a^2$. Importante frisar que as relações apresentadas nas eqs. (13) a (22) só serão válidas se as vigas possuírem diferentes rigidezes ($D_u \neq D_l$).

Aplicando as condições de contorno (fig. 2) nas eqs. (10), (11) e (12), e fazendo as devidas derivadas, obtêm-se os deslocamentos nodais escritos na forma matricial como:

$$\{u\} = [A]\{c\} \quad 27$$

sendo

$$\{u\} = \{w_{ui} \quad w'_{ui} \quad v_i \quad w_{li} \quad w'_{li} \quad w_{uj} \quad w'_{uj} \quad v_j \quad w_{lj} \quad w'_{lj}\}^T \quad 28$$

$$[A] = [[A_f(-1)] \quad [A_f(1)]]^T \quad 29$$

com

$$[A_f(\xi)] = [[f_u(\xi)] \quad [f'_u(\xi)] \quad [f(\xi)] \quad [f_l(\xi)] \quad [f'_l(\xi)]]^T \quad 30$$

e o vetor $\{c\}$ que contém os coeficientes dados na eq. (10).

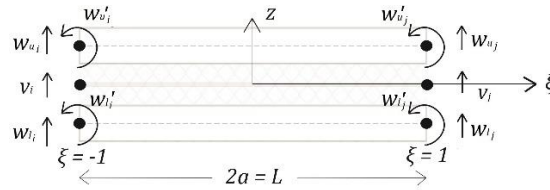


Figura 2. Sentidos positivos adotados para a viga dupla.

Importante notar que a matriz $[A]$ tem dimensão dez por dez, e as funções $f_i(\xi)$ relacionadas às vigas superior e inferior, são dadas por:

$$\begin{aligned}
 f_{i_0}(\varepsilon) &= 1 & 31 \\
 f_{i_1}(\varepsilon) &= \xi & 32 \\
 f_{i_2}(\varepsilon) &= \xi^2 + \psi_{i_1} & 33 \\
 f_{i_3}(\varepsilon) &= \xi^3 + 3\psi_{i_1}\xi & 34 \\
 f_{i_4}(\varepsilon) &= \xi^4 + 6\psi_{i_1}\xi^2 + \psi_{i_2} & 35 \\
 f_{i_5}(\varepsilon) &= \xi^5 + 10\psi_{i_1}\xi^3 + 5\psi_{i_2}\xi & 36 \\
 f_{i_6}(\varepsilon) &= \xi^6 + 15\psi_{i_1}\xi^4 + 15\psi_{i_2}\xi^2 + \psi_{i_3}(\xi) & 37 \\
 f_{i_7}(\varepsilon) &= \xi^7 + 21\psi_{i_1}\xi^5 + 35\psi_{i_2}\xi^3 + 7\psi_{i_3}(\xi)\xi & 38 \\
 f_{i_8}(\varepsilon) &= \xi^8 + 28\psi_{i_1}\xi^6 + 70\psi_{i_2}\xi^4 + 28\psi_{i_3}\xi^2 + \psi_{i_4} & 39 \\
 f_{i_9}(\varepsilon) &= \xi^9 + 36\psi_{i_1}\xi^7 + 126\psi_{i_2}\xi^5 + 84\psi_{i_3}\xi^3 + 9\psi_{i_4}\xi & 40
 \end{aligned}$$

Assim, as funções de forma podem ser obtidas por meio das equações a seguir:

$$\begin{aligned}
 [N_u] &= [f_u][A]^{-1} = [f_u][S] & 41 \\
 [N_l] &= [f_l][A]^{-1} = [f_l][S] & 42 \\
 [N_v] &= [f][A]^{-1} = [f][S] & 43
 \end{aligned}$$

onde a solução da matriz $[S]$ pode ser feita de forma simbólica ou numérica.

Dessa forma, discretizando a energia total eq. (1), e após a minimização, $\delta\Pi = 0$, e consequentes manipulações matemáticas, e ainda substituindo os deslocamentos dados pelas eqs. (10), (11) e (12), a seguinte expressão pode ser escrita:

$$\delta\pi = \frac{1}{2}\{\delta u\}^T \sum_{i=1}^2 \int_{-1}^1 (D_i[B_i]^T[B_i] - T_i[P_i]^T[P_i])Jd\xi\{\delta u\} + \frac{1}{2}\{\delta u\}^T \int_{-1}^1 [H_u]^T[H_u]Jd\xi\{\delta u\} + \frac{1}{2}\{\delta u\}^T G_s \int_{-1}^1 [P_v]^T[P_v]Jd\xi\{\delta u\} + \frac{1}{2}\{\delta u\}^T k_k \int_{-1}^1 [H_l]^T[H_l]Jd\xi\{\delta u\} - \{\delta u\}^T \sum_{i=1}^2 \int_{-1}^1 [N_i]^T[M]\{g_i\}Jd\xi = 0 \quad 44$$

onde $[B] = (d^2[N]/d\xi^2)(d\xi/dx^2)$, $[P] = (d[N]/d\xi)(d\xi/dx)$, $[H_u] = [N_u] - [N_v]$ e $[H_l] = [N_v] - [N_l]$.

Onde $J = a$.

Após o cálculo das integrais dadas na eq. (44), o sistema de vigas duplas pode ser escrito como:

$$\{u\}[K] = \{p\} \quad 45$$

onde a matriz de rigidez é obtida a partir da expressão a seguir:



$$[K] = [S]^T \left[\sum_{i=1}^2 ([R_i] - [R_{t_i}]) + [R_{cs}] + [R_g] + [R_{ks}] \right] [S] \quad 46$$

sendo cada submatriz expressa por:

$$[R_i] = D_i \int_{-1}^1 \frac{d^2[f_i]^T}{dx^2} \frac{d^2[f_i]}{dx^2} J d\xi = \frac{8D_i}{15015a^3} [n_i] \quad 47$$

$$[R_{t_i}] = T_i \int_{-1}^1 \frac{d[f_i]^T}{dx} \frac{d[f_i]}{dx} J d\xi = \frac{2T_i}{765765a} [p_i] \quad 48$$

$$[R_{cs}] = k_c \int_{-1}^1 [f_u - f]^T [f_u - f] J d\xi = \frac{2ak_c}{45045} [q_u] \quad 49$$

$$[R_g] = G_s \int_{-1}^1 \frac{d[f]^T}{dx} \frac{d[f]}{dx} J d\xi = \frac{2G_s}{765765a} [s] \quad 50$$

$$[R_{ks}] = k_k \int_{-1}^1 [f - f_l]^T [f - f_l] J d\xi = \frac{2ak_k}{45045} [q_l] \quad 51$$

Prosseguindo com as integrações, é possível obter os coeficientes $n_{j,k} = n_{k,j}$, $p_{j,k} = p_{k,j}$, $s_{j,k} = s_{k,j}$, $q_{j,k} = q_{k,j}$. Considerando que as vigas superior e/ou inferior possam estar sujeitas a um carregamento uniformemente distribuído, de intensidade g_i , então o vetor de carga será dado por:

$$\{p\} = \sum_{i=u}^l g_i [1 \ 0 \ \alpha_i \ 0 \ \beta_i \ 0 \ \gamma_i \ 0 \ \delta_i \ 0]^T \quad 52$$

onde $\alpha_i = \psi_{u_1} + 1/3$, $\beta_i = 2\psi_{u_1} + \psi_{u_2} + 1/5$, $\gamma_i = 3\psi_{u_1} + 5\psi_{u_2} + \psi_{u_3} + 1/7$ e $\delta_i = 4\psi_{u_1} + 14\psi_{u_2} + 28\psi_{u_3}/3 + \psi_{u_4} + 1/9$.

4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

4.1. Exemplo 1: Teste de convergência

Considere que as propriedades geométricas e mecânicas das vigas superior e inferior são: $E_u = 2 \cdot E_l = 10^{10} \text{ N/m}^2$, $I_u = I_l = 0,0004 \text{ m}^4$, e $L = 10\text{m}$. Em relação a fundação elástica, os parâmetros adotados são: $k_c = k_k = 200000 \text{ N/m}^2$ e $G_s = 10000 \text{ N}$. Sob a viga superior atua um carregamento uniformemente distribuído com intensidade $g_u = 50000 \text{ N}$. Os resultados obtidos são apresentados nas tabelas 1 e 2, onde foram utilizadas três diferentes malhas: um (MEF^1), dois (MEF^2) e dez elementos (MEF^{10}).

Tabela 1. Deslocamentos calculados no meio do vão.

	MEF^2	MEF^{10}	Exata
w_u	1,12876	1,12876	1,12876
v	1,03446	1,03445	1,03445
w_l	0,94514	0,94514	0,94514

Tabela 2. Inclinações da elástica no contorno à esquerda.

	MEF^1	MEF^2	MEF^{10}	Exata
w_u'	0,36301	0,36395	0,36387	0,36386
w_l'	0,29553	0,29759	0,29741	0,29741



A solução exata é obtida a partir da expansão das eqs. (2) a (4) em séries de Fourier, ficando:

$$w_u(x) = \sum_{i=1,3}^N A \cdot [D_l G_s \lambda_n^6 + (D_l k_c + D_l k_k) \lambda_n^4 + G_s k_k \lambda_n^2 + k_c k_k] \text{sen}(\lambda_n) \quad 53$$

$$v(x) = \sum_{i=1,3}^N A k_c (D_l \lambda_n^4 + k_k) \text{sen}(\lambda_n) \quad 54$$

$$w_l(x) = \sum_{i=1,3}^N A k_c k_k \text{sen}(\lambda_n) \quad 55$$

onde $A = 4 g_u / L \lambda_n \alpha$, $\alpha = D_l D_u G_s \lambda_n^{10} + D_u D_l (k_c + k_k) \lambda_n^8 = G_s (D_l k_c + D_u k_k) \lambda_n^6 + k_c k_k (D_l + D_u) \lambda_n^4 + G_s k_c k_k \lambda_n^2$ e $\lambda_n = N\pi/L$.

Comparando os resultados obtidos nas tabelas 1 e 2, vê-se que há uma rápida convergência do elemento finito proposto nesse trabalho, mesmo utilizando uma malha pobre.

4.2. Exemplo 2: Suporte com guias móveis.

Considere que o sistema do exemplo 1 possui agora guias móveis na extremidade direita ($V_l(L) = w_l'(L) = 0$), e que os seguintes carregamentos atuam no sistema: $g_u = 2 \cdot g_l = 10000 \text{ N}$ e $1,5 \cdot T_u = T_l = 25000 \text{ N}$. Dessa forma são calculados os deslocamentos e inclinações no sistema, onde os resultados obtidos são apresentados na tabela 3 e comparados com a solução analítica, obtida como uma extensão das eqs. (53) a (55).

Tabela 3. Deslocamentos e inclinações em $x = 0$ e $x = L$.

	MEF	EXATA		MEF	EXATA
$w_u'(0)$	1,05646	1,05646	$w_u(L)$	6,62704	6,62704
$w_l'(0)$	1,05903	1,05903	$v(L)$	6,63062	6,63062
			$w_l(L)$	6,64220	6,64220

Assim como o visto no exemplo 1, as respostas obtidas em termos de inclinação da elástica e deslocamento recuperam a resposta exata do problema com uma ótima precisão.

4. CONCLUSÃO

Nesse trabalho foi apresentada uma formulação baseada no método dos elementos finitos para análise da flexão de vigas duplas elasticamente conectadas por base elástica de Kerr, ao qual o efeito das cargas axiais e diferentes rigidezes de viga são considerados. Baseadas nas hipóteses de Euler-Bernoulli, foi proposto um elemento finito com dez graus de liberdade e, conseqüentemente, foram apresentadas a matriz de rigidez e vetor de carga.

O elemento finito com dez graus de liberdade foi apresentado e validado via exemplos numéricos onde, quando comparados às soluções exatas, apresentou resultados satisfatórios, mesmo com uma malha pobre se mostrou bastante eficiente. Além de atrativo, mostrou-se a versatilidade do mesmo quando considerado diferentes geometrias/propriedades mecânicas, condições de contorno e casos de carregamento.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.



REFERÊNCIAS

- Agboola, O. O., Gbadeyan, J. A., & Iyase, S. A. (2017). Vibration of an Elastically Connected Non-prismatic Double-beam System Using Differential Transform Method. In *Proceedings of the World Congress on Engineering (Vol. 1)*.
- Brito, W. K. F., Maia, C. D. C. D., & Mendonca, A. V. (2019). Bending analysis of elastically connected Euler–Bernoulli double-beam system using the direct boundary element method. *Applied Mathematical Modelling*, 74, 387-408.
- Chung, M. P., & Lin, K. C. (1988). Model and Analysis Method for Machine Components in Contact. In *Computational Mechanics' 88* (pp. 957-958). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Kerr, A. D. (1964). Elastic and viscoelastic foundation models.
- Kozić, P., Pavlović, R., & Karličić, D. (2014). The flexural vibration and buckling of the elastically connected parallel-beams with a Kerr-type layer in between. *Mechanics Research Communications*, 56, 83-89.
- Li, Y., Xiong, F., Xie, L., & Sun, L. (2021). State-space approach for transverse vibration of double-beam systems. *International Journal of Mechanical Sciences*, 189, 105974.
- Liu, S., & Yang, B. (2019). A closed-form analytical solution method for vibration analysis of elastically connected double-beam systems. *Composite Structures*, 212, 598-608.
- Milenković, B., Karličić, D., & Jovanović, Đ. (2021). Determination of natural frequency and amplitude ratio of a Rayleigh double beam system with a Keer middle layer subjected to compressive axial load.
- Mirzabeigy, A., Madoliat, R., & Surace, C. (2019). Explicit formula to estimate natural frequencies of a double-beam system with crack. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 41(5), 1-12.
- Seelig, J. M., & Hoppmann, W. H. (1964). Normal mode vibrations of systems of elastically connected parallel bars. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 36(1), 93-99.