

A: XXXIX-0000

ANÁLISE DE MEF PARA A PLACAS DUPLAS ESPESSAS

FEM ANALYSIS FOR DOUBLE THICK PLATES

Daniel B. de Oliveira (P) (1), Ângelo V. Mendonça (1), Weber G. M. Maciel (2), Arthur C. A. Pereira (1), Welky K. F. de Brito (1)

(1) Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade Federal da Paraíba – UFPB, Centro de Tecnologia, Campus I, 58059-900, João Pessoa/Paraíba, Brasil
mendonca@ct.ufpb.br.

(2) Departamento de Engenharia Civil, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba - IFPB, Campus Patos, Rodovia PB 110, s/n, Alto Tubiba, 58700-000, Patos/Paraíba, Brasil
webergmmaciell@gmail.com.

Área temática: Métodos Computacionais.

Resumo

As placas são elementos superficiais submetidos a cargas ortogonais. Geralmente elas aparecem simplesmente ligados a sólidos (em silos, em edifícios, em navios, em aviões) ou em estruturas onde são multiplamente ligadas por uma camada elástica (viadutos, sistemas de decks, pontes, pavimentos rígidos, galerias de drenagem, placas sanduíche, nanoestruturas). Neste trabalho são estudadas soluções numéricas para determinar as deflexões, as rotações e os momentos atuantes em placas duplas espessas retangulares e simplesmente apoiadas, sendo as placas constituídas de material elástico-linear, isotrópico e homogêneo, elasticamente ligadas por uma camada (fundação ou suporte elástico) de Winkler. Para isso, um elemento finito é originalmente desenvolvido, o qual é denominado de DST-DUPLA, onde as matrizes de rigidez e vetor de cargas nodais equivalentes são deduzidas a partir da extensão do elemento finito Discrete Shear Theory (DST) apresentado por Batoz e Lardeur, em 1989. Além disso, a camada elástica conectando as placas é representada por molas espaçadas infinitesimalmente (fundação elástica) ou por molas espaçadas finitamente (suporte elástico). São apresentados exemplos para validar a solução numérica proposta, comparando os deslocamentos e momentos obtidos nas placas e verificando a influência do cortante nos deslocamentos à medida que a espessura aumenta. Os resultados indicam robustez e coerência dos cenários analisados.

Palavras-chave: Elementos Finitos. DST. Placas Duplas Espessas. Fundação de Winkler.

Abstract

The plates are superficial elements subjected to orthogonal loads. They usually appear simply connected to solids (silos, buildings, ships, planes) or in structures where they are multiply connected to each other by an elastic layer (viaducts, deck systems, bridges, rigid pavements, drainage galleries, sandwich plates, nanostructures). In this work numerical solutions are studied to determine the deflections, rotations and moments acting in double thick rectangular plates and simply supported, being the plates constituted of linear elastic, isotropic and homogeneous material, elastically connected by a layer (foundation or elastic support) by Winkler. For this purpose, a finite element is originally developed, which is called DST-DOUBLE, where the stiffness matrices and equivalent nodal loads vector are deduced from the extension of the finite element Discrete Shear Theory (DST) presented by Batoz and Lardeur, in 1989. Furthermore, the elastic layer connecting the plates is represented by infinitesimally spaced springs (elastic foundation) or by finitely spaced springs (elastic support). Examples are presented to validate the proposed numerical solution, comparing the displacements and moments obtained in the plates and verifying the influence of the shear on the displacements as the thickness increases. The results indicate robustness and coherence of the analyzed scenarios.

Keywords: Finite Element; DST; Double Thick Plates; Winkler Foundation.



1. INTRODUÇÃO

A análise estrutural de sistemas duplos é geralmente mais complicada do que os respectivos problemas simples, pois os primeiros apresentam equações governantes mais complexas, geralmente associadas a equações governantes acopladas, mesmo nos casos mais simplificados. Diante dessas dificuldades, os sistemas duplos de vigas e placas já foram e continuam sendo objeto de diversas pesquisas envolvendo diferentes técnicas e métodos de solução. Alguns estudos foram direcionados para entender o agrupamento de sistemas de placa dupla, tais como em Hedrih (2008), Rosa e Lippiello (2008), Hedrih (2006), Swamida e Kunukkasseril (1973), Swamida e Kunukkasseril (1975), que discutiram o desenvolvimento de soluções analíticas para modelar as vibrações livres em placas duplas. Oniszczyk (2004), Cao *et al.* (2001), que desenvolveram seus estudos a partir de uma solução numérica para um sistema de placas interligadas por uma camada viscoelástica. Gbadeyan *et al.* (2019) utilizaram métodos analíticos e semi-analíticos em sua abordagem de estudo e (Hedrih 2008), já citado anteriormente, utilizou um método analítico para estudar a transferência de energia entre placas viscoelasticamente conectadas.

Diferentemente dos demais, (Pereira 2020) estuda a análise estática de placas duplas finas ligadas por uma fundação Winkler, utilizando soluções analíticas e numéricas pelo método dos elementos de contorno. No presente artigo, por outro lado, são desenvolvidas soluções numéricas para, baseado no método dos elementos finitos, determinar as deflexões, rotações e momentos atuantes em placas espessas pela teoria de Mindlin, elasticamente conectadas por uma camada (fundação ou suporte elástico). Para tanto, são apresentadas a dedução da matriz de rigidez de elementos finitos de placas duplas a partir da extensão do elemento de placas Discrete Shear Triangle (DST) originalmente desenvolvido por Batoz e Lardeur (1989). Na geração da matriz de rigidez da estrutura dupla, a camada elástica de ligação é considerada como fundação elástica ou como suporte elástico.

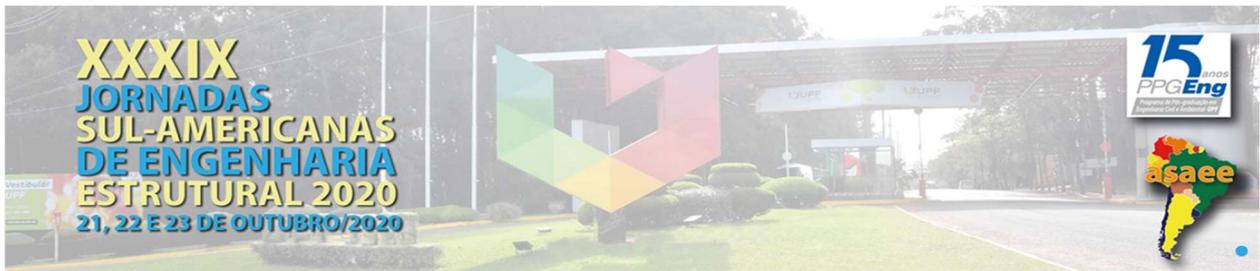
2. METODOLOGIA

Nesta seção é apresentada a metodologia para obtenção das soluções numéricas do problema de placas duplas espessas.

Alguns elementos finitos que são destaque dentro da família dos elementos finitos triangulares para placas são o DKT (Discrete Kirchhoff Theory) e o DST (Discrete Shear Theory), os quais possuem 9 graus de liberdade, três em cada vértice do triângulo.

Segundo (Batoz 1980), a origem do DKT é baseada na teoria de (Mindlin 1951), que considera deformações por cisalhamento. A restrição para placas delgadas, onde esses efeitos podem ser negligenciadas, é feita pela imposição, de modo discreto ao longo dos lados desse elemento, da condição de distorções nulas nos planos da placa. Batoz e Lardeur (1989) propuseram o DST, que pode ser considerado uma extensão do DKT para lidar com o efeito da deformação por cortante.

No presente artigo, o objetivo é desenvolver matematicamente um elemento finito de placas duplas espessas interconectado por uma camada elástica de Winkler a partir de elementos finitos de placas simples já existentes na literatura. Devido ao bom desempenho do elemento finito DST, partiu-se dele para o desenvolvimento de um elemento finito capaz de lidar com placas duplas. Nessa expansão, é possível notar na Fig.1 que o elemento agora é composto por dois triângulos que estão conectados pela camada elástica de Winkler, contendo seis nós, sendo 3 no triângulo superior e 3 no triângulo inferior e a cada nó desse está associado um deslocamento



transversal e duas rotações no plano. Nesse modelo duplo, a energia total de deformação é composta pela energia de deformação associada à flexão oriundo da placa superior e inferior e, adicionalmente, pela energia de deformação oriunda da mola:

$$\pi_p = U_{\text{Placa_Superior}} + U_{\text{Placa_Inferior}} + U_{\text{Molas}} \quad 1$$

A matriz de rigidez obtida a partir da energia de deformação para o elemento triangular da placa superior, bem como para o elemento triangular da placa inferior já é conhecida e está descrita no trabalho de (Batoz e Lardeur 1989) e por isso a mesma não será aqui demonstrada. Restando agora descobrir a matriz de rigidez associada a mola e que vai ser derivada de sua energia de deformação. Para tanto, considere a energia de deformação associada a mola escrita como:

$$U_{\text{Molas}} = \frac{1}{2} \int_A K_w (w - v)^2 dA \quad 2$$

Onde, K_w é a constante da mola, "w" e "v" são os deslocamentos transversais da placa superior e inferior, respectivamente, e "A" é a área do elemento.

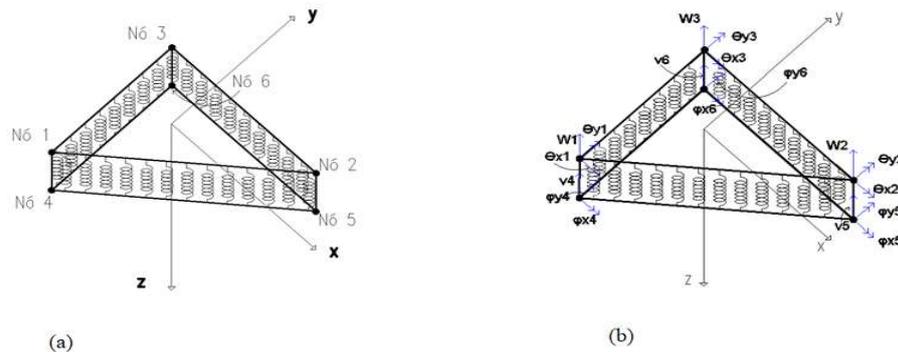


Figura 1: a) Representação esquemática do DST-DUPLO. b) Graus de Liberdade.
Fonte: Autores.

Fazendo a primeira variação da Eq. 2, tem-se:

$$\delta U_{\text{Molas}} = \int_A K_w (w - v) * \delta(w - v) dA = K_w * \int_A w * \delta w - w * \delta v - v * \delta w + v * \delta v dA \quad 3$$

Tomando;

$$w = [N] * \begin{bmatrix} w_i \\ w_j \\ w_k \end{bmatrix}, \quad e \quad \delta w = [N] * \begin{bmatrix} \delta w_i \\ \delta w_j \\ \delta w_k \end{bmatrix}, \quad v = [N] * \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_k \end{bmatrix}, \quad e \quad \delta v = [N] * \begin{bmatrix} \delta v_i \\ \delta v_j \\ \delta v_k \end{bmatrix}, \quad 4$$

Onde, $[N] = [N1 \ N2 \ N3]$ são as funções de forma, e os índices i, j e k estão associados aos vértices do elemento triangular. As funções N1, N2 e N3 podem ser encontradas em Hutton (2004, pág. 178).

Substituindo a Eq. 4 na Eq. 3 e reorganizando os termos. Tem-se:



$$\delta U_{\text{Molas}} = K_w * \left(\int_A \{\delta w\}^T * [N] * N^T * \{w\} * dA - \int_A \{\delta w\}^T * [N] * N^T * \{v\} * dA - \int_A \{\delta w\}^T * [N] * N^T * \{v\} * dA + \int_A \{\delta w\}^T * [N] * N^T * \{v\} * dA \right) \quad 5$$

Pela minimização do funcional da Eq. 5 é obtido a matriz de rigidez associada a mola

$$\delta U_{\text{Molas}} = \begin{Bmatrix} \delta w \\ \delta v \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_m & -K_m \\ -K_m & K_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta w \\ \delta v \end{Bmatrix} \quad 6$$

Onde,

$$K_m = K_w * \int_A \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 * N_2 & N_1 * N_3 \\ N_1 * N_2 & N_2^2 & N_2 * N_3 \\ N_1 * N_3 & N_2 * N_3 & N_3^2 \end{bmatrix} * dA = \frac{K_w * A}{12} * \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad 7$$

A matriz do elemento DST simples é de nona ordem e quando for associado ao DST duplo (duas placas) é obtida, portanto, uma matriz de rigidez cuja dimensão é 18 (dezoito), como pode ser visto, de forma esquemática, na Eq. 8.

$$\begin{bmatrix} \text{DSTs} & 0 \\ 0 & \text{DSTi} \end{bmatrix}, \quad \text{sendo, } [\text{DSTs}] = [\text{DSTi}] = [9 \times 9] \quad 8$$

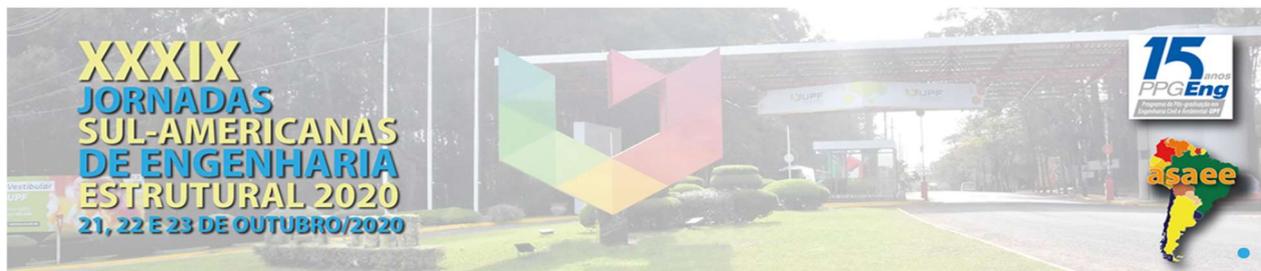
Para compor a matriz final do sistema de placas se faz necessário somar a matriz de rigidez referente as duas placas, Eq. 8, mais a matriz de rigidez referente a mola, Eq. 7, o que daria um incompatibilidade de dimensão. Para contornar esse problema foi criada uma expansão da matriz Km dada pela Eq. 9.

$$K'_m = \frac{K_w * A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 9$$

Sendo a matriz geral do sistema de placas duplas considerando os efeitos da mola:

$$[k] = \begin{bmatrix} \text{DSTs} + K'_m & -K'_m \\ -K'_m & \text{DSTi} + K'_m \end{bmatrix} \quad 10$$

A partir da Eq. (10) e pela adição de matrizes complementares, é obtido a matriz de rigidez associada ao DST-DUPLO, que é o elemento finito para placas duplas espessas elasticamente conectadas. Convém notar que neste artigo, o elemento finito DST duplo além de incorporar o efeito de molas infinitesimalmente espaçadas como fundação elástica, o efeito de conectividade das placas também pode ser modelado como um sistema de suportes elásticos finitamente espaçados. Neste caso, a contribuição de rigidez de cada suporte pode ser acumulada diretamente



nos nós da placa pela multiplicação da constante de mola K_w pela área de influência do nós que cada suporte está ligado.

3. ANÁLISE DE RESULTADOS

Seja um sistema de placas duplo simplesmente apoiado e interligado por uma camada elástica e com carga uniformemente distribuída. Além disso, o sistema possui as seguintes características: Comprimento e largura igual a 1 m, espessura das placas h_1 e h_2 , constante da mola de ligação $K_w = 2.8 \text{ MPa}$, carga distribuída aplicada na placa superior igual a $g = 1 \text{ kN/m}^2$, módulo de elasticidade $E = 28 \text{ MPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Deseja-se avaliar os deslocamentos transversais nas placas usando o elemento finito DST-DUPLO usando duas discretizações: 8×8 e 16×16 , como mostrado na Fig. 2.

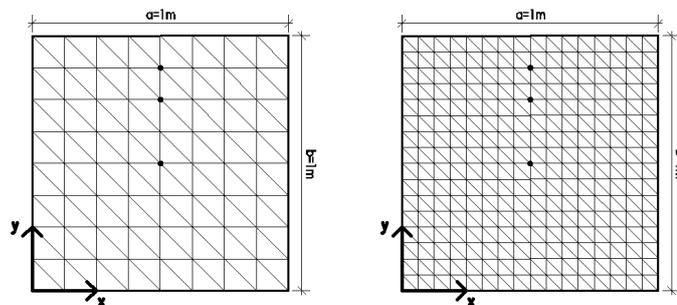


Figura 2: Discretizações das malhas utilizadas.

Fonte: Autores

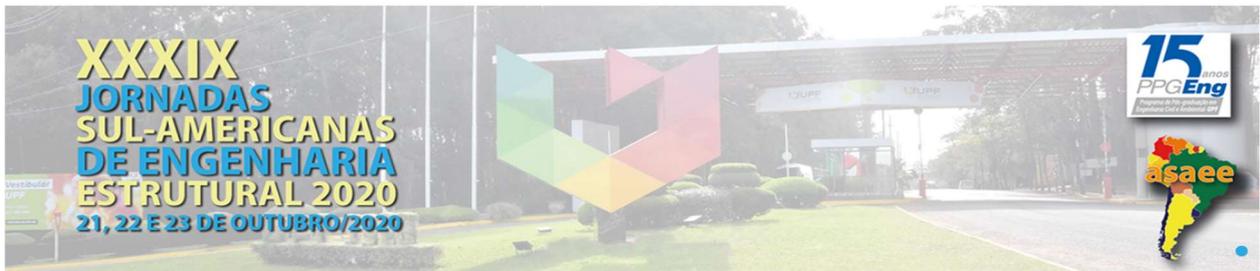
Os resultados em deslocamentos nesta seção são referentes aos pontos ao longo do eixo central paralelo ao eixo “y” ($x=0.5$ e $x'=0,5$), alterando, portanto, apenas a coordenada “y”. Os resultados das duas espessuras de placas são mostrados nas Tabelas 1 e 2.

Tabela 1: Deslocamentos nas placas com espessura $h_1=h_2= 0,01 \text{ m}$.

Placa Superior – Deslocamentos ($\times 10^{-1} \text{ m}$)				Placa Inferior – Deslocamentos ($\times 10^{-1} \text{ m}$)				
Fundação Elástica		Suporte Elástico		Fundação Elástica		Suporte Elástico		
y (m)	Malha (8x8)	Malha (16x16)	Malha (8x8)	Malha (16x16)	Malha (8x8)	Malha (16x16)	Malha (8x8)	Malha (16x16)
0,500	7,9373	7,9353	7,9322	7,9318	7,9355	7,9335	7,9298	7,9296
0,250	5,7282	5,7366	5,7241	5,7338	5,7266	5,7348	5,7223	5,7320

Tabela 2: Deslocamentos nas placas com espessura $h_1=h_2= 0,2 \text{ m}$.

Placa Superior – Deslocamentos ($\times 10^{-1} \text{ m}$)				Placa Inferior – Deslocamentos ($\times 10^{-1} \text{ m}$)				
Fundação Elástica		Suporte Elástico		Fundação Elástica		Suporte Elástico		
y (m)	Malha (8x8)	Malha (16x16)	Malha (8x8)	Malha (16x16)	Malha (8x8)	Malha (16x16)	Malha (8x8)	Malha (16x16)
0,500	1,8325	1,8222	1,8241	1,8203	5,6296	5,6929	5,7139	5,7112
0,250	1,3476	1,3461	1,3380	1,3437	3,9666	4,0349	4,0627	4,0595



As soluções numéricas pelo DST-DUPLO onde a camada é modelada como fundação elástica de Winkler houve uma tendência de queda nos deslocamentos da placa superior e uma tendência de aumento nos deslocamentos da placa inferior à medida que a malha se tornou mais refinada. Esse comportamento não é tão visível para o caso de idealização da camada de ligação como um suporte elástico. Com o uso de fundação elástica ou suporte elástico, o DST-DUPLO convergiu para os resultados alcançados pelas soluções analíticas quando essas foram obtidas considerando as hipóteses de Mindlin, ficando mais afastada das soluções que utilizaram as hipóteses da teoria de Reissner. Isto é plausível porque o DST incorpora a teoria de Mindlin em sua formulação.

Considere agora o sistema de placas duplas quadradas com as seguintes características: comprimento dos lados de 1 m; espessuras 0,2 m; constante da mola $K_w=2.8$ MPa; carga distribuída na placa superior $g=1$ kN/m²; módulo de elasticidade $E=28$ MPa; e coeficiente de Poisson $\nu=0,3$. Na Figura 3, são mostrados os resultados em momentos fletores ao longo da linha central da placa superior.

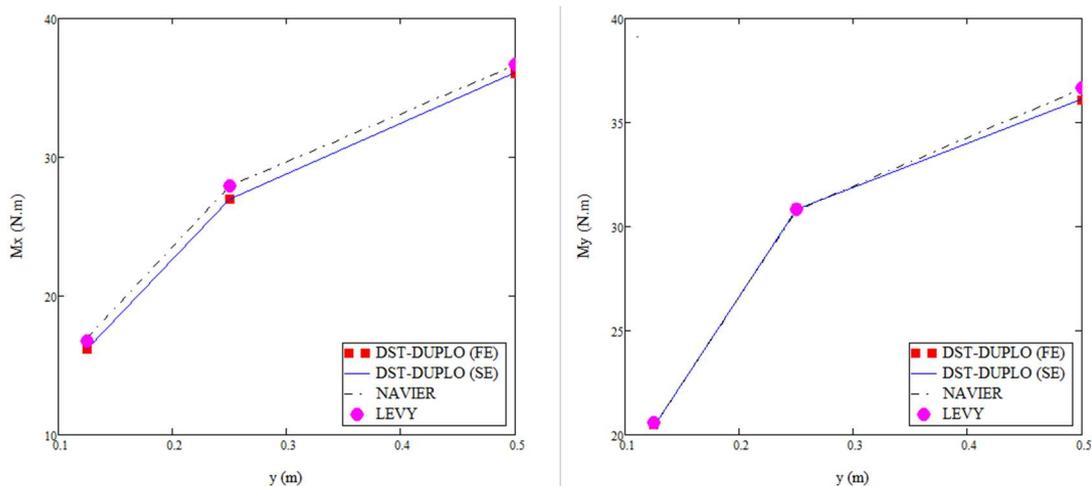


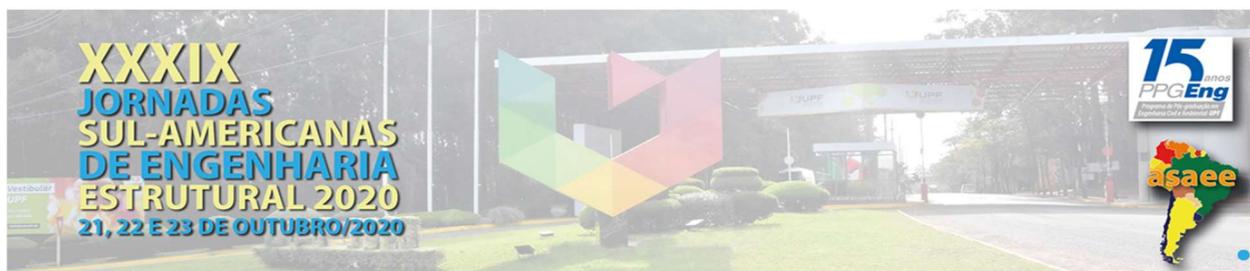
Figura 3: Momentos Fletores ao Longo da Placa Superior: a) direção x , b) direção y.

Além disso, com o objetivo de verificar a influência do cortante nas placas à medida que a espessura aumenta, foi realizado o cálculo dos erros relativos entre os resultados numéricos/analíticos levando em conta as teorias de Reissner e Mindlin, que consideram efeitos de cortante e a teoria de Kirchhoff que os despreza. Segundo (Pereira 2020) os deslocamentos na placas superior e inferior de um sistema duplo de placas ligadas por uma camada elástica de Winkler podem ser dados pelas seguintes expressões:

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n Gmn * \frac{[D_2 * (X_m^2 + Y_n^2)^2 + K_w] * \sin(X_m * x) * \sin(Y_n * y)}{[D_1 * (X_m^2 + Y_n^2)^2 + K_w] * [D_2 * (X_m^2 + Y_n^2)^2 + K_w] - K_w^2} \quad 11$$

$$v(x, y) = \sum_m \sum_n Gmn * \frac{K_w * \sin(X_m * x) * \sin(Y_n * y)}{[D_1 * (X_m^2 + Y_n^2)^2 + K_w] * [D_2 * (X_m^2 + Y_n^2)^2 + K_w] - K_w^2} \quad 12$$

Diante das Eqs. 11 e 12 e, considerando as soluções apresentadas anteriormente para o caso que assumem as hipóteses das teorias de Mindlin e Reissner, são apresentados nas Fig. 4a e Fig. 4b dois gráficos que relacionam a espessura versus o erro relativo entre os resultados obtidos a partir de cada hipótese. No gráfico da Fig. 4a é mostrado o erro relativo entre os resultados dos



deslocamentos no centro da placa quando se considera as hipóteses de Mindlin e Kirchhoff tanto na placa superior como na placa inferior. Enquanto o gráfico da Fig. 4b mostra resultados análogos para o caso dos modelos de Reissner e Kirchhoff.

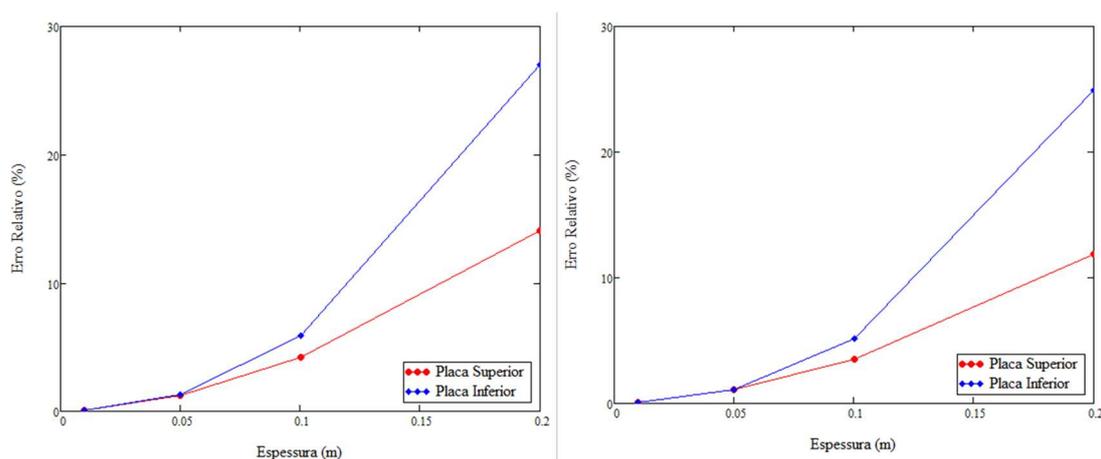


Figura 4: Espessura Versus Erro Relativo: a) Kirchhoff e Mindlin, b) Kirchhoff e Reissner
Fonte: Autores

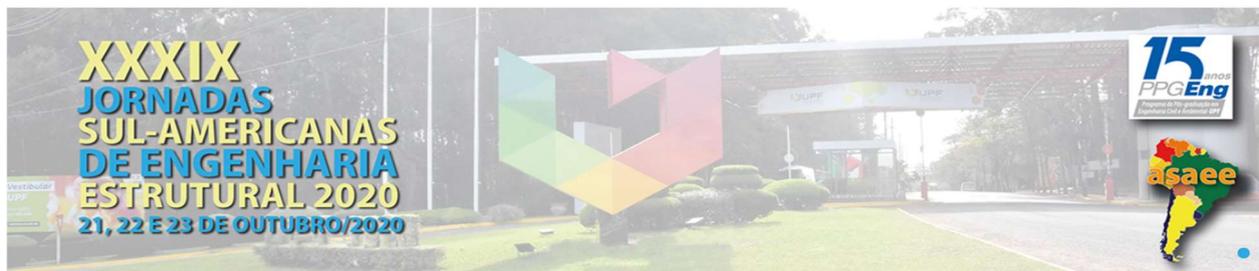
A partir das Figs 4a e 4b é possível observar que a influência que o cortante causa no resultado final dos deslocamentos no centro da placa se torna mais relevante à medida que a espessura vai sendo acrescida. No caso mais crítico estudado, um erro de cerca de 14% para a placa superior é observado, enquanto um erro de aproximadamente 27% para a placa inferior é notado, em ambos os casos, se considera os resultados obtidos entre as teorias de Mindlin e Kirchhoff quando a espessura é 0.2 m. Já quando a espessura é pequena, 0.01 m, nota-se que é quase nulo o erro relativo entre as abordagens de solução, como era esperado. Nota-se também que os erros gerados entre os resultados de Mindlin e Kirchhoff são mais acentuados que os erros obtidos entre Reissner e Kirchhoff.

4. CONCLUSÃO

Esse estudo possibilitou a análise dos deslocamentos transversais e os momentos atuantes em um sistema dupla de placas espessas conectadas elasticamente por meio do desenvolvimento de soluções numéricas. Nesse sentido foram desenvolvidas um novo elemento finito de placa duplo, o DST-DUPLO. No que diz respeito a influência do esforço cortante nas placas espessas, foi observado que essas não devem ser desprezadas indiscriminadamente, visto que variações significativas nos deslocamentos das placas podem ser observadas à medida que a relação espessura/vão aumenta. Convém notar que para os casos de placas mais delgadas (razão de aspecto h/a em torno de 1/100), o modelo kirchhoff pode ser mais competitivo que os de Mindlin e Reissner, já que o sistema de equações resultante é menos complexo e exige um menor custo computacional para produção dos resultados sem perda significativa da qualidade da resposta.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.



REFERÊNCIAS

- Batoz, J. L. Bathe, K.J., and Ho, L.W. (1980). A study of three-node triangular plate bending elements. *Int. J. Num. Eng.*, 15, 1771 – 1812.
- Batoz, J. L. and Lardeur, P. (1989). Discrete shear triangular nine D.O.F element for the analysis of thick to very thin plates. *Int. J. Num. Eng.*, 28, 533 – 560.
- Cao, T. N. T. Reddy, JN. Lieu, Q. X. Nguyen, X. V. and Luong, V. H. (2021). A multi-layer moving plate method for dynamic analysis of viscoelastically connected double-plate systems subjected to moving loads. *Advances in Structural Engineering*, 24(9), 1798 – 1813.
- Oliveira, D. B. (2021). Soluções Analíticas e Numéricas de Sistemas Duplos de Placas Espessas Elasticamente Conectadas - Análise Estática de Sistemas Duplos de Placas Espessas. Relatório Final do Programa de Iniciação Científica - PIBIC/CNPq. Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa-PB.
- Gbadeyan, J. A. Ogunmiloro, O. M. and Fadugba, S. E. (2019). Dynamic response of an elastically connected double non-mindlin plates with simply-supported end condition due to moving load. *Khayyam J. Math.*, 1, 40 –59.
- Hedrih, K. (Stevanovic) (2008). Transversal vibrations of double-plate systems. *Acta Mech Sin.*, 24, 331 – 344.
- Hutton, D.V. (2004) *Fundamentals of finite element analysis*. The McGraw Hill Companies – NY.
- Mindlin, R. D. (1951). Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of applied mechanics*, New York.
- Oniszczyk, Z. (2004). Forced transverse vibrations of an elastically connected complex rectangular simply supported double-plate system. *Journal of Sound and Vibration*, v. 270, 997-1011.
- Pereira, A. C. A. (2020). Análise de placas duplas delgadas elasticamente conectadas: Uma abordagem pelo método dos elementos finitos. Dissertação de mestrado, Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa-PB.
- Reissner, E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *A.M.S.E. (The American Society of Mechanical Engineers)*, 29. New York.
- Rosa, M. A. and Lippiello, M. (2008). Free vibrations of simply supported double plate on two models of elastic soils. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 33: 331-353.
- Swamidas, A. S. J. and Kunukkasseril, V. X. (1973). Normal modes of elastically connected circular plate. *Journal of Sound and Vibration*, v. 30, 99-108.
- Swamidas, A. S. J. and Kunukkasseril, V. X. (1975). Free vibration of elastically connected circular plate system. *Journal of Sound and Vibration*, v. 39, 229-235.